1ES – Février 2013 – Corrigé

Exercice 1

Le tableau ci-dessous renseigne sur les besoins en eau dans le monde :

	Population mondiale (Milliards d'habitants)	Volume moyen par habitant (m^3/an)	Volume global (Milliards de m^3/an)
1950	2,5	400	1000
1970	3,6	500	1800
1990	5,5	600	3300
2010	7,6	750	5700

Tous les taux d'évolution seront arrondis au dixième.

1) a) Calculer les taux d'évolution en pourcentage de la population et du volume moyen utilisé entre deux années consécutives de ce tableau.

Taux d'évolution entre 1950 et 1970 :

Population mondiale : $\frac{3,6-2,5}{2,5} \times 100 = 44\ \%$; Volume moyen par habitant : $\frac{500-400}{400} \times 100 = 25\%$

Taux d'évolution entre 1970 et 1990 :

Population mondiale : $\frac{5,5-3,6}{3,6} \times 100 \simeq 52,8\ \%$; Volume moyen par habitant : $\frac{600-500}{500} \times 100 = 20\%$

Taux d'évolution entre 1990 et 2010 :

Population mondiale : $\frac{7,6-5,5}{5,5} \times 100 \simeq 38,2\ \%$; Volume moyen par habitant : $\frac{750-600}{600} \times 100 = 25\%$

b) Compléter le tableau puis calculer les taux d'évolution en pourcentage du volume global d'eau utilisé entre deux années consécutives.

Taux d'évolution entre 1950 et 1970 : $\frac{1800-1000}{1000} \times 100 = 80\ \%$

Taux d'évolution entre 1970 et 1990 : $\frac{3300-1800}{1800} \times 100 \simeq 83,3\ \%$

Taux d'évolution entre 1990 et 2010 : $\frac{5700-3300}{3300} \times 100 \simeq 72,7\ \%$

2) On suppose que les taux d'évolution bi-décennaux calculés entre 1990 et 2010 restent fixes pour les 20 ans à venir.

Déterminer le coefficient multiplicateur (arrondi au millième près) puis estimer alors le taux d'évolution du volume global d'eau utilisé :

- entre 2010 et 2030 : Le taux d'évolution global ne change pas par rapport aux 20 années précédentes donc le coefficient multiplicateur est $1 + \frac{72,7}{100} = 1,727$
- entre 2010 et 2050 : Sur 40 ans (2×20 ans) le coefficient multiplicateur est $1,727 \times 1,727 \simeq 2,983$. Le taux d'évolution est alors $(2,983 - 1) \times 100 = 198,3\%$

- entre 2010 et 2110 : Sur 100 ans (5×20 ans) le coefficient multiplicateur est $(1{,}727)^5 \simeq 15{,}362$. Le taux d'évolution est alors $(15{,}362 - 1) \times 100 = 1436{,}2$

Compléter le tableau suivant :

Période	Coefficient multiplicateur	Pourcentage d'évolution (%)
2010-2030	1 ,727	72,7
2010-2050	2,983	198,3
2010-2070	5,152	415,2
2010-2090	8,897	789,7
2010-2110	15,365	1436,5

3) Le volume d'eau utilisable sur la planète est 40000 milliards de m^3/an.

Quel problème risque de se poser à l'horizon 2110 ? Justifier.

A ce rythme, à l'horizon 2110, la consommation globale d'eau pourrait être de $5700 \times 15{,}365 \simeq 87580$ milliards de m^3/an. Un volume très largement supérieur aux ressources d'eau utilisable.

4) **a)** Si l'on décide de ralentir l'augmentation bi-décennale de 14%, quel serait alors le nouveau coefficient multiplicateur bi-décennal ?

Si l'on décide de ralentir l'augmentation bi-décennale de 14%, alors le nouveau coefficient multiplicateur serait de $1{,}727 \times \left(1 - \frac{14}{100}\right) \simeq 1{,}485$

b) Quelles seraient les volumes globaux d'eau consommés en 2030, 2050, 2070, 2090 et 2110 ?

Compléter le tableau suivant :

Période	Coefficient multiplicateur	Pourcentage d'évolution (%)	Volume d'eau utilisé (à l'unité près)
2010-2030	1,485	48,5	8465
2010-2050	2,205	120,5	12569
2010-2070	3,275	227,5	18668
2010-2090	4,863	386,3	27719
2010-2110	7,222	622,2	41165

c) Cette réduction de la consommation permettrait-elle de résoudre le problème de la consommation d'eau utilisable sur la planète ?

Provisoirement peut-être. Mais d'ici 2110 le problème serait à nouveau posé.

Exercice 2

Un navire de pêche affrété par des scientifiques, effectue des prélèvements de saumons en Atlantique Nord pour les étudier. Un banc de 63 saumons a été capturé. On souhaite savoir si ces saumons sont plutôt sauvages ou plutôt issus d'un élevage d'où ils se seraient échappés.

Les saumons ont été mesurés. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Taille (cm)	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125
Effectif	2	0	1	5	5	5	4	4	5	4
Effectif cumulé croissant	2	2	3	8	13	18	22	26	31	35

Taille (cm)	126	127	128	129	130	131	132	133	134
Effectif	2	3	2	5	6	3	4	2	1
Effectif cumulé croissant	37	40	42	47	53	56	60	62	63

1) a) Compléter le tableau puis déterminer la médiane Me. Interpréter ce résultat.

$\frac{63}{2} = 31{,}5$ donc la médiane est la valeur de la variable qui correspond à l'effectif $n = 32$. Soit $Me = 125$.

50 % des effectifs du banc de saumon a une taille inférieure ou égale à 124 cm. L'autre moitié a une taille supérieure ou égale à 125.

b) le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série en expliquant la démarche.

$\frac{63}{4} = 15{,}75$ donc Q_1 correspond à la valeur de la variable correspondant à l'effectif $n = 16$. Soit $Q_1 = 121$.

$\frac{63}{4} \times 3 = 47{,}25$ donc Q_3 correspond à la valeur de la variable correspondant à l'effectif $n = 48$. Soit $Q_3 = 130$.

c) Déterminer l'intervalle interquartile I. Que peut-on en déduire ?

$I = Q_3 - Q_1 = 130 - 121 = 9$.

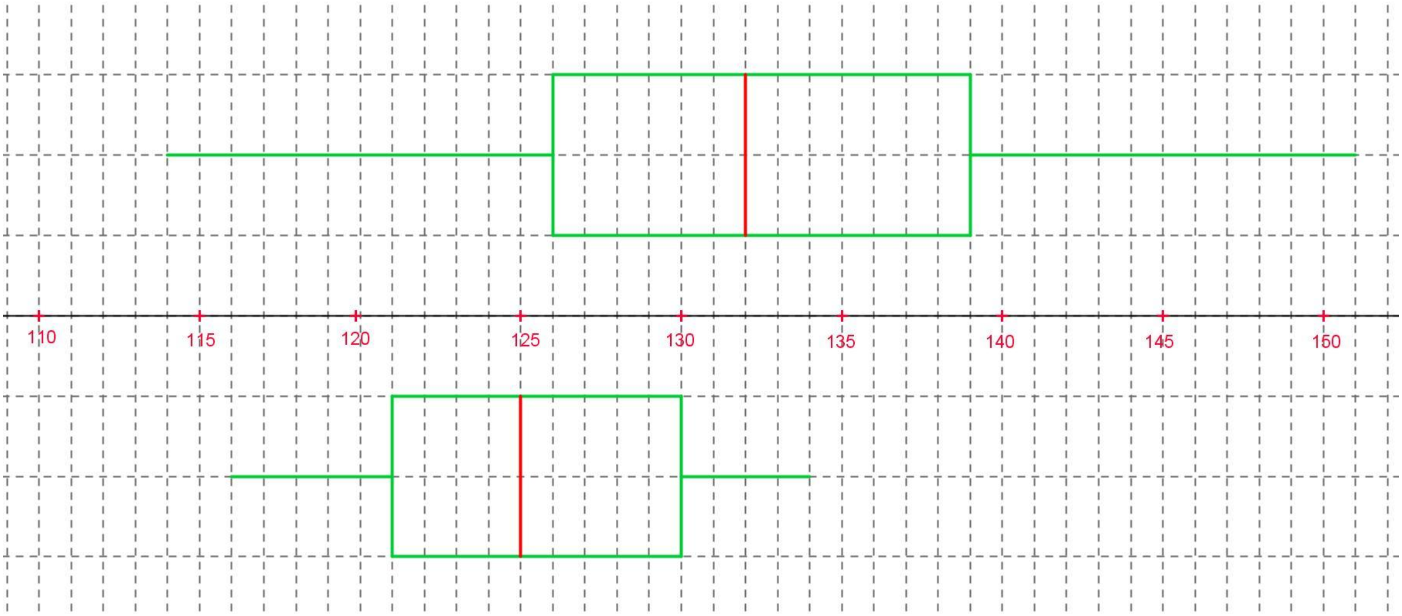
Environ la moitié de la population a une taille qui diffère de 9 cm ou moins. La taille des poissons varie peu.

d) Quelle est l'étendue e de la série ? Interpréter ce résultat.

$e = 134 - 116 = 18$. La différence de taille entre le plus grand et le plus petit saumon du banc est 18 cm. C'est peu. Cela confirme qu'il y aurait peu de différence entre les poissons de ce banc.

2) Le diagramme en boîte correspondant à un banc de saumons sauvages est tracé ci-dessous.

a) Construire le diagramme en boîte correspondant à la série étudiée sous le diagramme en boîte des saumons sauvages.



b) A l'aide des deux diagrammes en boîtes, déterminer si les saumons capturés sont plutôt issus d'un élevage ou plutôt sauvages. Justifier.

D'après ces diagrammes, on peut supposer que les saumons capturés sont plutôt issus d'un élevage. En effet, au moins 75 % des saumons du banc capturé ont une taille inférieure à 130 cm (Q3 = 130) alors qu'au moins 50 % des saumons du banc de saumons sauvages ont une taille supérieure à 132 cm (on lit : Me = 132). De plus, plus de 50 % des saumons du bac capturé ont une taille inférieure à 127 cm (Me = 125) alors qu'au moins 75 % des saumons du banc de saumons sauvages ont une taille supérieure à 127 cm (on lit : Q1 = 127). Les saumons du banc capturé ont donc globalement une taille inférieure à celui du banc de saumons sauvages.

L'écart interquartile pour la série des tailles des saumons du banc capturé est de 9 cm (130 – 121) alors que l'écart interquartile pour la série des tailles des saumons sauvages est de 12 cm (139 – 127). L'étendue de la série des tailles des saumons du banc capturé est de 18 cm alors que l'étendue de la série des tailles des saumons du banc de saumons sauvages est de 37 cm (151 – 114). Les saumons du banc capturé ont donc une répartition des tailles plus homogène.

Exercice 3

Dans une école maternelle, une enseignante décide de consacrer la vendredi après-midi à une activité parmi l'informatique, le chant, les arts plastiques.

Cette activité est choisie chaque semaine par un élève différent. On admet qu'il y a indépendance entre les choix des élèves.

Le professeur a pu constater que la probabilité qu'un élève choisisse l'informatique est trois fois plus importante que de choisir le chant et la probabilité de choisir le chant est deux fois moins importante que celle de choisir les arts plastiques.

On désigne par I, C et A les évènements suivants :

I : « L'élève désigné a choisi l'informatique » ;

C : « L'élève désigné a choisi le chant » ;

A : « L'élève désigné a choisi les arts plastiques ».

1) a) Montrer que la probabilité p_c de l'évènement C qu'un élève choisisse le chant est $\frac{1}{6}$.

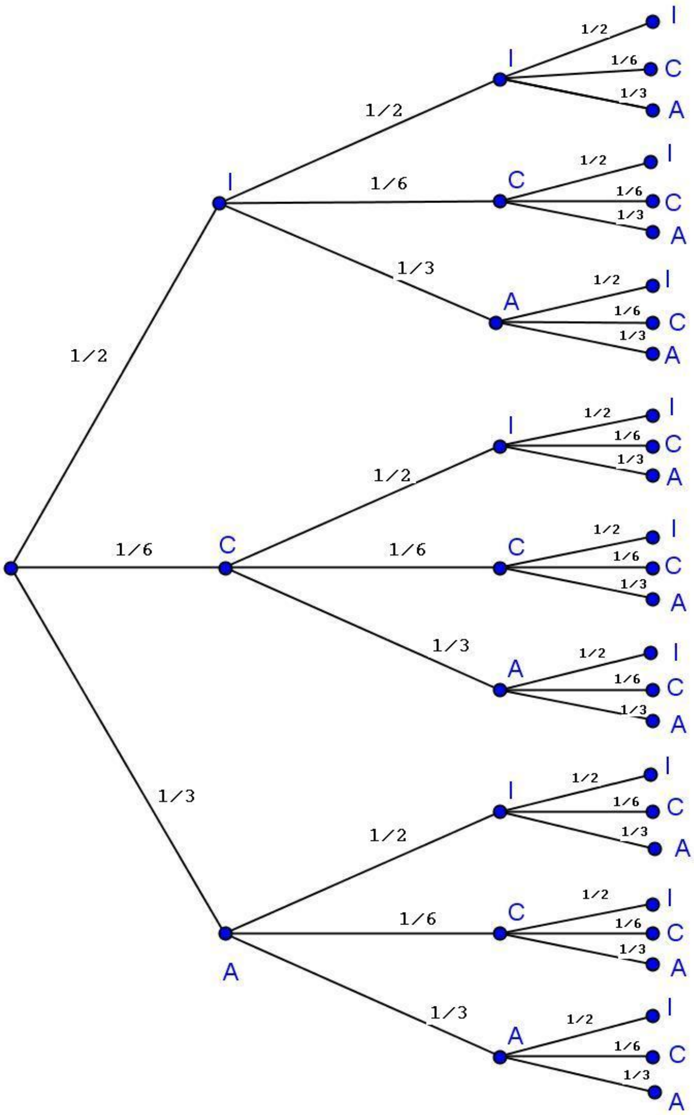
Soit p_c la probabilité qu'un élève choisisse le chant, p_i celle qu'il choisisse l'informatique et p_a la probabilité qu'il choisisse les arts plastiques. On sait que $p_i + p_a + p_c = 1$, $p_i = 3p_c$ et $p_c = \frac{1}{2}p_a$.

$$p_i + p_a + p_c = 1 \Leftrightarrow 3p_c + 2p_c + p_c + 1 \Leftrightarrow 6p_c = 1 \Leftrightarrow p_c = \frac{1}{6}$$

b) En déduire la probabilité des évènements I et A.

$p_i = 3p_c = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p_a = 2p_c = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) Construire l'arbre pondéré lié à cette situation sur trois semaines.



2) Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où l'informatique est choisie sur 3 semaines d'affilée.

a) Écrire la liste des évènements qui réalisent $(X = 0)$

(A, A, A) ; (A, A, C) ; (A, C, A) ; (A, C, C) ; (C, A, A) ; (C, A, C) ; (C, C, A) ; (C, C, C)

b) Calculer $P(X = 0)$

$P(X = 0) = P((A, A, A) \cup (A, A, C) \cup (A, C, A) \cup (A, C, C) \cup (C, A, A) \cup (C, A, C) \cup (C, C, A) \cup (C, C, C))$

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right) + 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0{,}125$$

c) En déduire $P(X \geq 1)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}125 = 0{,}875$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = -x + 5 - \frac{4}{x}$

Sa courbe représentative, notée C_f ,est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal. On note f' la dérivée de la fonction f.

La courbe C_f passe par les points $A(1\,;0)$ et $B(2\,;1)$. La tangente à la courbe C_f au point B est parallèle à l'axe des abscisses.

1) Déterminer par lecture graphique $f'(2)$.

La tangente est horizontale donc $f'(2) = 0$.

2) a) Vérifier que $f'(x) = \frac{4-x^2}{x^2}$.

$$f'(x) = -1 - \left(-\frac{4}{x^2}\right) = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{-x^2 + 4}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2}$$

c) Étudier le signe de $f'(x)$.

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $4 - x^2$

Étude du signe de $4 - x^2$

On remarque que $4 - x^2 = (2 - x)(2 + x)$

Ce polynôme de degré 2 a deux racines évidentes 2 et -2.

$a = -1 < 0$ donc on a le tableau de signes suivant (signe de a à l'extérieur des racines):

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le signe de $f'(x)$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

d) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

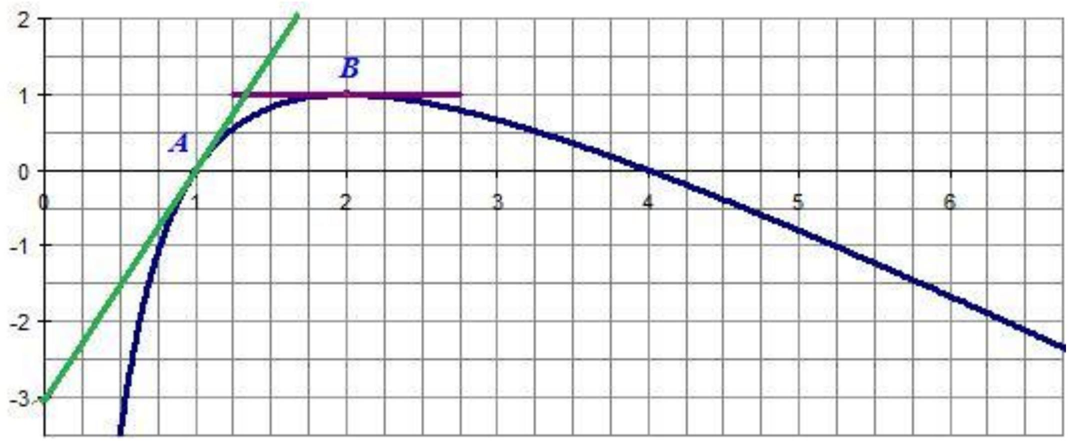
f	$\nearrow$ 1 $\searrow$

3) Donner une équation de la tangente T à la courbe au point A.

$f'(1) = \frac{4-1}{1} = 3$ et $f(1) = 0$

D'où l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = 3(x-1)$

Tracer cette droite sur le graphique précédent.

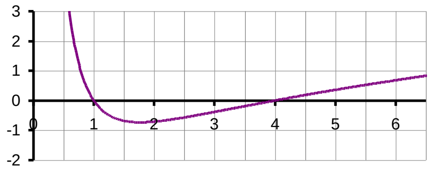


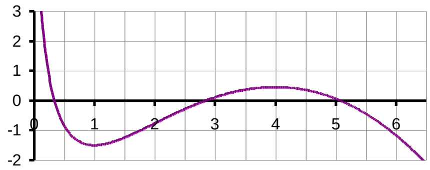
4) a) Par lecture graphique, déterminer le signe de $f(x)$ que l'on donnera sous forme d'un tableau.

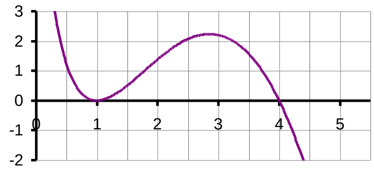
x	0		1		4		$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Des trois courbes représentées ci-dessous, quelle est celle qui est la représentation graphique d'une fonction F définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et ayant pour dérivée la fonction f ? Justifier

Seule la courbe 2 convient. Cette courbe décroit entre 0 et 1 (la dérivée f est négative), elle croit entre 1 et 4 (la dérivée f est positive), elle décroit à nouveau entre 4 et $+\infty$ (la dérivée f est négative).


courbe 1


courbe 2


courbe 3