DST 6 Correction

<u>Exercice 1</u> *(5 points)* *(Asie, juin 2011)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Étude d'une fonction f.

On considère la f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{lnx}{x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. La courbe C_f est représentée en annexe à rendre avec la copie.

a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} lnx=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}=+\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ $(Théorème\ de\ croissances\ comparées)$

b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times lnx}{x^2}=\frac{1-lnx}{x^2}$$

c) En déduire les variations de la fonction f.

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-lnx\geq 0\Leftrightarrow 1\geq lnx\Leftrightarrow e\geq x$ car la fonction $x\longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;+\infty[$.

On en déduit les variations de f :

Si $0<x<e, f'(x)>0$ et f est strictement croissante.

Si $x>e, f'(x)<0$ et f est strictement décroissante.

On peut résumer les informations des questions 1 a) b) et c) dans le tableau de variations suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2) Étude d'une fonction g.

On considère la g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $g(x)=\frac{(lnx)^2}{x}$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifié, on utilisera la relation : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}(\ln x)^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x} = +\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$

$$4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}}\right)^2 = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{(\ln x)^2}{x} = g(x)$$

On pose $y = \sqrt{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} 4\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 = 0$ par croissances comparées.

b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient et composée de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

$$g'(x) = \frac{2\times\frac{1}{x}\times \ln x\times x - 1\times(\ln x)^2}{x^2} = \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln x(2-\ln x) \geq 0$

$2 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \ln x \Leftrightarrow e^2 \geq x$ car la fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
g	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0

3) a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points en commun dont on précisera les coordonnées.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{(\ln x)^2}{x} \Leftrightarrow \ln x = (\ln x)^2 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e$$

Les points d'intersection des courbes C_f et C_g sont $A(1\,;0)$ et $B(e;\frac{1}{e})$

b) Étudier les positions relatives des courbes C_f et C_g.

$$f(x)-g(x)=\frac{lnx}{x}-\frac{(lnx)^2}{x}=\frac{lnx}{x}(1-lnx)$$

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, $\frac{lnx}{x}$ a le même signe que lnx ;

On a le tableau de signes suivant :

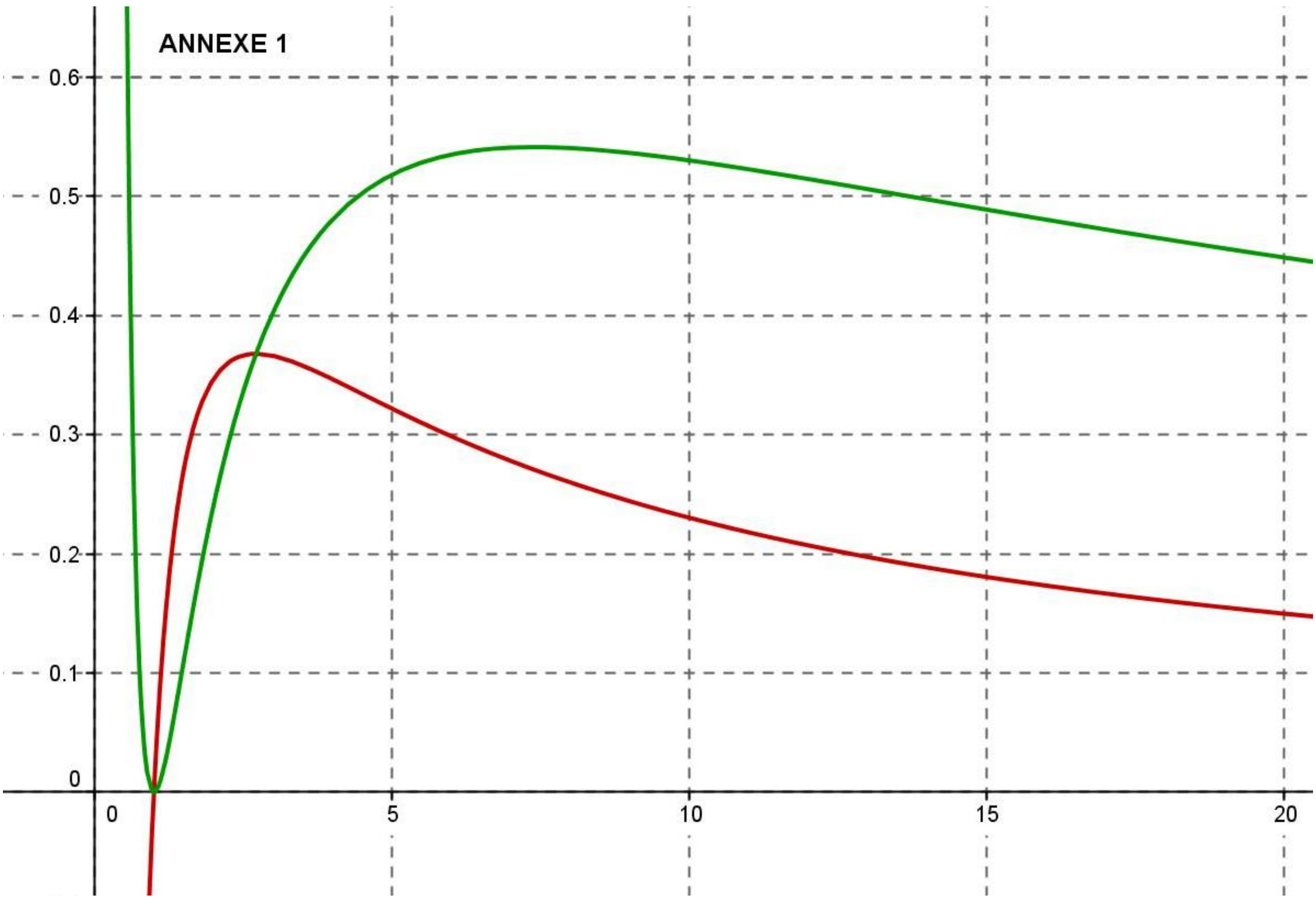
x	0		1		e		$+\infty$
$\frac{lnx}{x}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$1-lnx$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur les intervalles $]0;1[$ et $]e;+\infty[$, $f(x)-g(x)<0 \Longrightarrow f(x)<g(x)$ et donc C_f est en dessous de C_g

Sur l'intervalle $]1;e[$, $f(x)-g(x)>0 \Longrightarrow f(x)>g(x)$ et donc C_f est au dessus de C_g

Au points d'abscisses $x=1$ et $x=e$, les courbes se croisent.

d) Tracer sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C_g.



4)

4) On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=e$.

En exprimant l'aire A, comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer A.

$$A=\int_1^e (f(x)-g(x))dx=\int_1^e \frac{lnx}{x}dx-\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x}dx=\left[\frac{(lnx)^2}{2}\right]_1^e-\left[\frac{(lnx)^3}{3}\right]_1^e=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\ u.a.$$

Rappel : Quelque soit $n\neq -1$, on a $u'\times u^n$ a pour primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$. Ici $u=lnx$ et $u'=\frac{1}{x}$

Exercice 2 *(4 points)* *(Polynésie, juin 2008)*

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\1-2\\4-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1-1\\-3-2\\2-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-5\\-1\end{pmatrix}$

$\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}=\frac{-2}{-1}=2$ et $\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}=\frac{-5}{-1}=5$ donc $\frac{x_{\overrightarrow{AC}}}{x_{\overrightarrow{AB}}}\neq\frac{y_{\overrightarrow{AC}}}{y_{\overrightarrow{AB}}}$

donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnelles

donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc les points A, B et C ne sont pas alignés

b) $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2\times(-1)-1\times(-1)+1\times1=-2+1+1=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times(-2)-1\times(-5)+1\times(-1)=-4+5-1=0$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC)

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

c) Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}M\in(ABC)&\Leftrightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\&\Leftrightarrow 2(x-1)-1(y-2)+1(z-3)=0\\&\Leftrightarrow 2x-2-y+2+z-3=0\\&\Leftrightarrow 2x-y+z-3=0\end{aligned}$$

Une équation cartésienne du plan (ABC) est donc $2x-y+z-3=0$

2) Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases}x=2-2t\\y=-1+t\\z=4-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

a) Pour $t=-1$, on a : $\begin{cases}x=2-2\times(-1)\\y=-1-1\\z=4-(-1)\end{cases}$ soit $\begin{cases}x=4\\y=-2\\z=5\end{cases}$ donc $D\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix}$ appartient à la droite (Δ)

b) D'après l'équation paramétrique de (Δ), le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

or $\vec{u} = -\vec{n}$ donc le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (ABC)

donc la droite (Δ) est perpendiculaire au plan (ABC)

3) Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)

a) E est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC), or la droite passant par D et perpendiculaire au plan (ABC) est la droite (Δ), donc $E(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite (Δ) et au plan (ABC).

$$E \in (ABC) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1+t \\ z = 4-t \\ 2(2-2t)-(-1+t)+4-t-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 2-2\times 1 \\ y = -1+1 \\ z = 4-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \text{ donc } E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $DE = \left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \sqrt{(0-4)^2+(0+2)^2+(3-5)^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

<u>Exercice 3</u> *(5 points)*

1) Pour tout entier naturel n non nul, pour tout réel θ, $\left(e^{i\theta}\right)^n$ est égal à:

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{n\times i\theta} = e^{in\theta}$ réponse **a**

$= e^{i\times(n\theta)} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ réponse **d**

2) Soit z un nombre complexe tel que $z = x+iy$ (x et y réels).

Si z est un imaginaire pur, alors $|z|^2$ est égal à :

$|z|^2 = |iy|^2 = \left(\sqrt{y^2}\right)^2 = y^2$ réponse **a**

$-z^2 = -(iy)^2 = -i^2y^2 = y^2 = \left|z^2\right|$ réponse **c**

3) On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

$$z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2 - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2-\sqrt{2}} + \left(i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{4-2} - 2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

$$\left|z^2\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$$

Soit θ un argument de z, $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} \\ \sin\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$

donc $z^2 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$ réponse **b**

$$\left|\frac{1}{\left(\bar{z}\right)^2}\right| = \frac{|1|}{\left|\bar{z^2}\right|} = \frac{1}{\left|z^2\right|} = \frac{1}{4}$$ réponse **d**

4) On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes : $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = 1$. Alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{2} = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{w_n}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n+w_n}{2} = 0$ et $e^0 = 1$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{u_n+v_n}{2}} = 1$ réponse **b**

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$ donc (v_n) peut avoir n'importe quel nombre réel compris entre -1 et 1 comme limite, ou même ne pas avoir de limite réponse **d**

5) Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$ pour tout entier naturel n :

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 1 - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$ réponse **b**

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln v_{n+1} = \ln 2v_n = \ln 2 + \ln v_n = \ln 2 + \ln(u_n - 1) = \ln 2 + w_n$ réponse **d**

<u>Exercice 4</u> *(6 points)*

Une entreprise fabrique, en grande quantité, des pièces métalliques rectangulaires dont les côtés sont exprimés en millimètres. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que la longueur et la largeur de la pièce sont conformes à la norme en vigueur.

Partie A

Dans les questions qui suivent, les résultats seront approchés, si nécessaire, à 10^{-4} *près.*

On note E l'évènement « Une pièce prélevée au hasard dans le stock de l'entreprise est conforme ». On suppose que $P(E) = 0{,}9$.

On prélève au hasard 50 pièces dans le stock. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 pièces. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces conformes parmi ces 50 pièces.

1) Quelle est la loi suivie par X ? Donner ses paramètres.

Lorsque l'on prélève au hasard une pièce du stock, il y a deux issues possibles : soit la pièce est conforme avec une probabilité $p = 0{,}9$, soit elle ne l'est pas avec une probabilité $1 - p = 0{,}1$. On a donc un schéma de Bernoulli. Si on prélève 50 pièces, on assimile le tirage à un tirage avec remise. On peut donc considérer que les prélèvements sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire X qui compte le nombre de pièces conformes dans le prélèvement suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}9$.

2) a) Calculer la probabilité que toutes les pièces soient conformes.

$P(X = 50) = \binom{50}{50} \times 0,9^{50} \times 0,1^0 = 0,9^{50} \simeq 0{,}0052$

b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au moins une pièce ne soit pas conforme.

$P(X \leq 49) = 1 - P(X = 50) = 1 - 0,9^{50} \simeq 0,9948$

3) a) Justifier que la loi de la variable aléatoire $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ peut être approchée par la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

$n = 50 \geq 30, np = 50 \times 0,9 = 45 \geq 5$ et $n(1-p) = 50 \times 0,1 = 5 \geq 5$.

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème de Moivre-Laplace. On peut donc approcher $Z = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par la loi normale $N(0\,;1)$.

b) Déterminer au moyen de l'approximation précédente la probabilité que le nombre de pièces conformes, dans un tel prélèvement, soit supérieur ou égal à 40.

$\mathrm{P}(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{40-45}{\sqrt{4,5}}\right) = P\left(Z \geq -\frac{5\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{2} + P(-\frac{5\sqrt{2}}{3} \leq Z < 0) \simeq 0,9908$

Partie B

Une partie des pièces de la production de l'entreprise est fabriquée par une machine automatique appelée « machine 1 ». M et N sont les variables aléatoires qui, à chaque pièce prélevée au hasard dans un lot très important fabriqué par la machine 1, associe respectivement sa longueur et sa largeur.

On suppose que M suit la loi normale d'espérance $\mu_1 = 250$ et d'écart-type $\sigma_1 = 1,95$.

On suppose que N suit la loi normale d'espérance $\mu_2 = 150$ et d'écart-type $\sigma_2 = 1,52$.

1) Calculer la probabilité que la longueur de la pièce prélevée au hasard soit comprise entre 246 et 254.

$P(246 \leq M \leq 254) \simeq 0,9598$

2) Calculer la probabilité que la largeur de la pièce prélevée au hasard soit comprise entre 147 et 153.

$P(147 \leq N \leq 153) \simeq 0,9516$

3) Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254 et sa largeur est comprise entre 147 et 153.

   On admet que les variables aléatoires M et N sont indépendantes.

   Montrer que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans ce lot soit conforme est 0,9133.

Les variables aléatoires sont indépendantes donc

$P[(246 \leq M \leq 254) \cap (147 \leq N \leq 153)] = P(246 \leq M \leq 254) \times P(147 \leq N \leq 153) \simeq 0,9133$

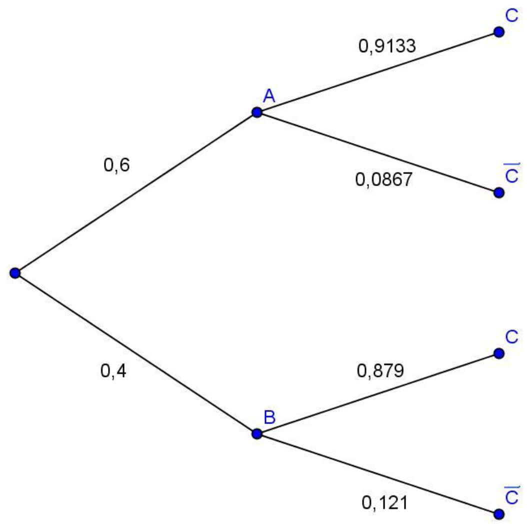
Partie C

Une autre machine automatique de l'entreprise, appelée « machine 2 », fabrique également ces mêmes pièces en grande quantité. On suppose que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production d'une journée de la machine 1 soit conforme est 0,9133 et que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard dans la production journalière de la machine 2 soit conforme est 0,879.

La machine 1 fournit 60% de la production totale et la machine 2 le reste.

On prélève au hasard une pièce parmi la production totale de l'entreprise. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être tirées. On définit les évènements A : « la pièce provient de la machine 1 », B : « La pièce provient de la machine 2 » et C : « La pièce est conforme ».

1) a) Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.



b) Déterminer les probabilités $P(A), P(B), P_A(C)$ et $P_B(C)$

Par lecture de l'énoncé on a : $P(A) = 0{,}6, P(B) = 1 - P(A) = 0{,}4, P_A(C) = 0{,}9133$ et $P_B(C) = 0{,}879$.

2) Déterminer $P(C)$. Interpréter le résultat.

Les pièces ne peuvent provenir que des machines 1 ou 2. Donc les évènements A et B forment une partition de l'univers. On en déduit, d'après la formule des probabilités totales, que :

$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B) = P_A(C) \times P(A) + P_B(C) \times P(B)$

$P(C) = 0{,}6 \times 0{,}9133 + 0{,}4 \times 0{,}879 \simeq 0{,}8996$ à 10^{-4} près.

Environ 90% des pièces sont conformes.

3) Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de la machine 1 sachant qu'elle n'est pas conforme.

$$P_{\bar{C}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}6 \times 0{,}0867}{1 - 0{,}8996} \simeq 0{,}5181$$