DST n°4 - Corrigé

Centre étranger – Juin 2007 (6 point)

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $(E) : e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1) Démontrer que x est solution de l'équation (E) si et seulement si $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = e^{-x} \Leftrightarrow xe^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x$ est solution de (E)

2) Étude du signe de la fonction f.

a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x}$.

Quelque soit x réel, $e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

b) En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

$\lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$ et $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et par somme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et par différence de limites

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus :

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ que l'on nomme α (corollaire du théorème des valeurs intermédiaires).

De plus $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x}$ donc α est l'unique solution de (E).

c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) \simeq -0{,}1 < 0$ et $f(1) \simeq 0{,}6 > 0$ donc comme f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ on a $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0; \alpha]$ et $f(\alpha) = 0$ d'où le tableau de signes :

x	0	α
$f(x)$	$-$	0

II. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x(1+e^x) \Leftrightarrow 1 = xe^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0$$

2) En déduire que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

D'après la question I-2)b) α est l'unique solution de (E).

Or $g(x) = x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0$ donc α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

3) Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

La fonction g est dérivable et $g'(x) = \frac{1+e^x-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x(x-e^{-x})}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$

Quelque soit x réel, $(1+e^x)^2 > 0$ donc $g'(x)$ a le même signe que $-e^x(x-e^{-x})$;

Or sur $[0; \alpha]$, $x-e^{-x} \leq 0$ et ne s'annule qu'une fois en $x = \alpha$. Donc $g'(x) \geq 0$ et g est strictement croissante sur $[0; \alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Initialisation : $u_1 = g(u_0) = g(0) = \frac{1}{2}$. Donc $0 = u_0 \leq u_1 \leq \alpha$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel k tel que : $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha$

Comme g est strictement croissante sur $[0; \alpha]$, on a :

$0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha \Leftrightarrow g(0) \leq g(u_k) \leq g(u_{k+1}) \leq g(\alpha)$

De plus $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $g(\alpha) = \alpha$

Donc $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \alpha \Longrightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq \alpha$

Conclusion : Quelque soit n entier naturel, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note l sa limite.

La suite (u_n) est croissante et majorée par α donc elle converge vers une limite $0 \leq l \leq \alpha$.

3) Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de l.

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n \Leftrightarrow g(l) = l$ car la fonction g est continue sur [0; α] donc en particulier en l.

l est donc solution de l'équation $g(x) = x$. Donc $l = \alpha$.

Polynésie – Septembre 2007 (4 points)

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes :

40 % sont de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

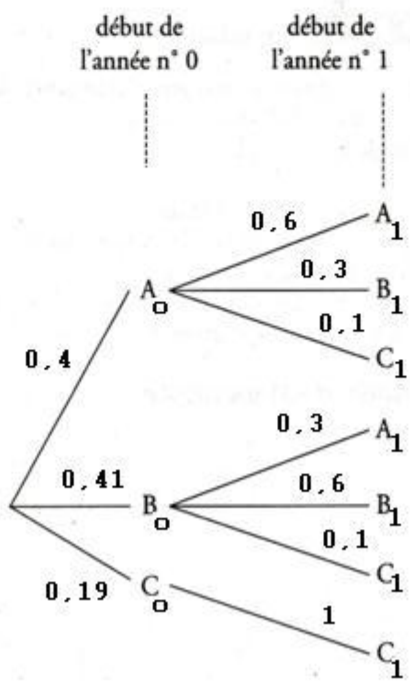
- Chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- Chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.
- Chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.
La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.
Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la $n-ième$ année est de type A »
- B_n l'événement « la plante choisie la $n-ième$ année est de type B »
- C_n 'événement « la plante choisie la $n-ième$ année est de type C »

On désigne par p_n, q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n , B_n et C_n.
Compte tenu de la composition initiale de la végétation (début de l'année n° 0) on pose :
$p_0 = 0{,}40, q_0 = 0{,}41\ et\ r_0 = 0{,}19$.



1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.

2) a) Montrer que $p_1 = 0{,}363$ puis calculer q_1 et r_1.

$p_1 = p(A_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_1) = 0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}41 = 0{,}363$

$q_1 = p(A_0 \cap B_1) + p(B_0 \cap B_1) = 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}41 \times 0{,}6 = 0{,}366$

$r_1 = p(A_0 \cap C_1) + p(B_0 \cap C_1) + p(C_0 \cap C_1)$

$= 0{,}4 \times 0{,}1 + 0{,}41 \times 0{,}1 + 0{,}19 = 0{,}271$

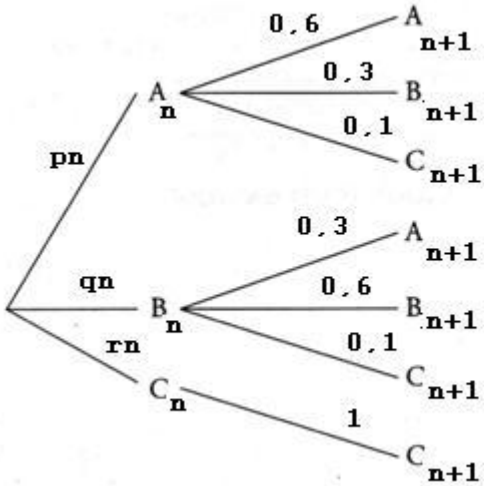
b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3q_n \\ q_{n+1} = 0{,}3p_n + 0{,}6q_n \end{cases}$$

On peut modéliser la situation par l'arbre suivant :

$p_{n+1} = p(A_n \cap A_{n+1}) + p(B_n \cap A_{n+1}) = 0{,}6p_n + 0{,}3q_n$

$q_{n+1} = p(A_n \cap B_{n+1}) + p(B_n \cap B_{n+1}) = 0{,}3p_n + 0{,}6q_n$



3) On définit les suites (S_n) et (D_n) sur $\mathbb{N}$ par :

$S_n = q_n + p_n$ et $D_n = q_n - p_n$

a) Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

$S_{n+1} = q_{n+1} + p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}3q_n + 0{,}3p_n + 0{,}6q_n = 0{,}9p_n + 0{,}9q_n = 0{,}9(p_n + q_n) = 0{,}9S_n$

Donc (S_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $S_0 = p_0 + q_0 = 0{,}81$

On montrerait de même que (D_n) est la suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $D_0 = 0{,}41 - 0{,}40 = 0{,}01$.

b) Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n).

La suite (S_n) est la suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $S_0 = 0{,}81$ donc $S_n = 0{,}81 \times 0,9^n$.

$0{,}9 \in]-1; 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$

On obtient le même résultat pour D_n.

c) En déduire les limites des suites (p_n), (q_n) et (r_n). Interpréter le résultat.

$$\begin{cases} S_n = p_n + q_n \\ D_n = q_n - p_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_n = \dfrac{S_n - D_n}{2} \\ q_n = \dfrac{S_n + D_n}{2} \end{cases}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = 0$

Comme $r_n + q_n + p_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1$

A long terme, les plantes A et B vont disparaître et il ne restera que des plantes de type C.

Métropole – Septembre 2012 (5 points)

L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$ (α)

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$

1) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{7}{x})$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{7}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 7}{2x^2}$$

$f'(x)$ a le même signe que $x^2 - 7$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$

Il y a une solution unique dans l'intervalle $]0; +\infty[$: $x = \sqrt{7}$

x^2-7 est positif à l'extérieur des racines et donc négatif entre 0 et $\sqrt{7}$.

On en déduit que f est décroissante sur $[0;\sqrt{7}]$ et croissante sur $[\sqrt{7};+\infty[$. La fonction admet donc un minimum en $\sqrt{7}$ égal à $f(\sqrt{7})=\frac{1}{2}\left(\sqrt{7}+\frac{7}{\sqrt{7}}\right)=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{7})=\sqrt{7}$.

En déduire que pour tout entier naturel $n, u_n \geq 7$.

Comme $\sqrt{7}$ est le minimum de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$ on a pour tout entier naturel n,

$u_{n+1}=f(u_n)\geq\sqrt{7}$. De plus, $u_0=3>\sqrt{7}$. Donc, pour tout entier naturel $n, u_n\geq 7$

2) a) Soit n un entier naturel quelconque.

Étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)-u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{u_n}-u_n\right)=\frac{1}{2}\frac{(7-{u_n}^2)}{u_n}$$

$\frac{1}{2}>0, u_n>0$ et $u_n\geq\sqrt{7}\Longrightarrow u_n^2\geq 7\Longrightarrow u_n^2-7\geq 0\Longrightarrow 7-u_n^2\leq 0$

Donc $u_{n+1}-u_n\leq 0$

b) Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n)est convergente ?

$u_{n+1}-u_n\leq 0\Longrightarrow(u_n)$ est décroissante.

De plus elle est minorée par $\sqrt{7}$ donc elle converge vers une limite $l\geq\sqrt{7}$

c) On déduit de la relation (α) que la limite l de cette suite est telle que $l=\frac{1}{2}(l+\frac{7}{l})$.

Déterminer l.

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n\Leftrightarrow l=\frac{1}{2}\left(l+\frac{7}{l}\right)\Leftrightarrow 2l=l+\frac{7}{l}\Leftrightarrow l^2=7\Longrightarrow l=\sqrt{7}\text{ car la limite est positive}$$

3) Démontrer que pour tout entier naturel $n, u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\frac{(u_n-\sqrt{7})^2}{u_n}$.

$$u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}-2\sqrt{7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n^2-2\sqrt{7}u_n+7}{u_n}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{(u_n-\sqrt{7})^2}{u_n}$$

4) On définit la suite (d_n) par :

$d_0=1$ et pour tout entier naturel $n, d_{n+1}=\frac{1}{2}{d_n}^2$

a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n-\sqrt{7}\leq d_n$.

Initialisation : $u_0-\sqrt{7}=3-\sqrt{7}\simeq 0{,}35<1=d_0$

Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel k tel que $u_k-\sqrt{7}\leq d_k$

$$u_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\times\frac{(u_k-\sqrt{7})^2}{u_k}$$

Or quelque soit n entier naturel $u_n\geq\sqrt{7}\Longrightarrow u_n\geq 1\Longrightarrow\frac{1}{u_n}\leq 1$

Donc $u_{k+1}-\sqrt{7}\leq\frac{(u_k-\sqrt{7})^2}{2}\leq\frac{{d_k}^2}{2}=d_{k+1}$

L'hérédité est prouvée.

Conclusion : Pour tout entier naturel $n, u_n-\sqrt{7}\leq d_n$.

b) Voici un algorithme :

Variables	n et p sont des entiers naturels
	d est un réel
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de p
Initialisations	Affecter à d la valeur 1
	Affecter à n la valeur 0
Traitement	Tant que $d > 10^{-p}$
	Affecter à d la valeur $0{,}5d^2$
	Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie	Afficher n

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5.

Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

$d_n \leq 10^{-9}$ dès que $n \geq 5$. Donc $d_5 \leq 10^{-9}$

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

$\boldsymbol{u_5 - \sqrt{7} \leq d_5 \Leftrightarrow u_5 - \sqrt{7} \leq 10^{-9}}$ donc $\boldsymbol{u_5}$ est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.

Métropole – Septembre 2007 (5 points)

Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1) Écrire Z sous forme algébrique.

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(2-2i)}{8} = \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})(1-i)}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

2) Déterminer les modules et arguments de z_1, z_2 et Z.

$$|z_1| = \left|\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|Z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{8}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow Arg z_1 = \frac{\pi}{3} \ mod 2\pi$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + i\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Longrightarrow Arg z_2 = \frac{\pi}{4} \ mod 2\pi$$

$$Arg Z = Arg\frac{z_1}{z_2} = Arg z_1 - Arg z_2 = \frac{\pi}{12} \ mod 2\pi$$

3) En déduire $cos\frac{\pi}{12}$ et $sin\frac{\pi}{12}$.

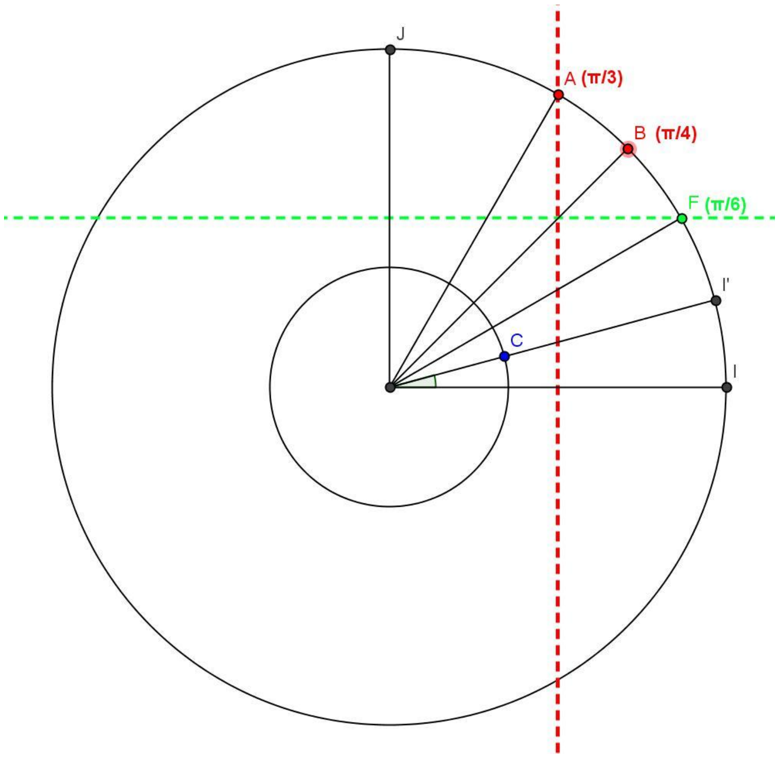
$cos\frac{\pi}{12} = Re(Z) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = Im(z) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4) Le plan est muni d'un repère orthonormal, on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z_1, z_2 et Z.

Placer le point B, puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

- On place le point B de coordonnées $(2\,;2)$
- On trace le cercle de centre O et de rayon OB $(2\sqrt{2})$
- On trace le point A comme intersection de la médiatrice du segment $[OI]$ et de l'arc de cercle $\widehat{OJ}$ $(cos\frac{\pi}{3} > 0$ et $sin\frac{\pi}{3} > 0)$.
- Le point F comme intersection de la médiatrice du segment $[OJ]$ et de l'arc de cercle $\widehat{OJ}$ $(cos\frac{\pi}{6} > 0$ et $sin\frac{\pi}{6} > 0)$.
- Le point C sur le cercle de centre O et de rayon 1 et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{IOF}$



5) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007}.

$Z = e^{i\frac{\pi}{12}}$

$|Z^{2007}| = |Z|^{2007} = 1$

$$\begin{aligned} ArgZ^{2007} &= 2007ArgZ \ mod\ 2\pi \\ &= 2007 \times \frac{\pi}{12}\ mod\ 2\pi \\ &= \frac{669\pi}{4}\ mod\ 2\pi \\ &= \frac{672\pi - 3\pi}{4}\ mod\ 2\pi \\ &= -\frac{3\pi}{4}\ mod\ 2\pi \end{aligned}$$

Donc $Z^{2007} = cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + isin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$