Devoir commun de seconde – Février 2013 – Corrigé

Exercice 1 – Généralités sur les fonctions (15 points)

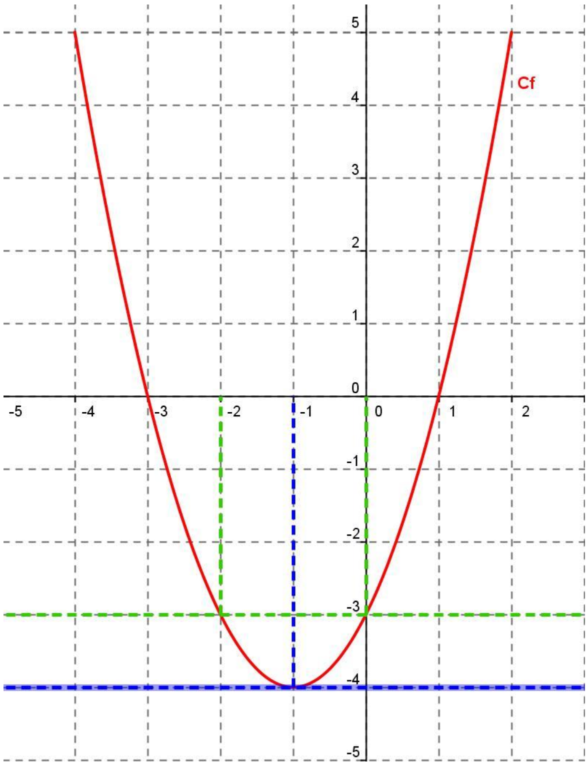
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1- A l'aide de la calculatrice compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-4	-3	-2	$-1{,}5$	$-1{,}25$	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	0	1	2
$f(x)$	5	0	-3	$-3{,}75$	$-3{,}937$	-4	$-3{,}937$	$-3{,}75$	-3	0	5

2- Représenter $\mathcal{C}_f$ sur $[-4; 2]$



3- a) Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.

Les antécédents de 0 par f sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses. On obtient $x = -3$ et $x = 1$.

Pour les questions 3b) et 3c), on laissera apparents les traits de construction justifiant les résultats.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -4$.

$f(x) = -4 \Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > -3$ sur l'intervalle $[-4; 2]$

$f(x) > -3 \Leftrightarrow x \in [-4; -2[\cup]0; 2]$

$S = [-4; -2[\cup]0; 2]$

4- La courbe admet-elle un maximum sur $[-4; 2]$? un minimum sur $[-4; 2]$? Si oui, préciser sa valeur et pour quelles valeurs de x il est atteint.

Sur $[-4; 2]$, la courbe a un maximum $M = 5$ qui est atteint en $x = -4$ et $x = 2$.

Sur $[-4; 2]$, la courbe a un minimum $m = -4$ qui est atteint en $x = -1$.

5- Dresser le tableau de signes de f sur $[-4; 2]$.

x	-4		-3		1		2
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

6- Dresser le tableau de variations de f sur $[-4; 2]$

x	-4		-1		2
f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

Partie B

1) Vérifier par le calcul que :

a) $f(x) = (x+1)^2 - 4$

$(x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3 = f(x)$

b) $f(x) = (x-1)(x+3)$

$(x-1)(x+3) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3 = f(x)$

2) Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -3$

Interpréter ce résultat graphiquement.

$x = 1$ et $x = -3$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.

Partie C

On donne une fonction g définie sur $[-3; 4]$ telle que g est décroissante sur $[-3; -1]$ puis croissante sur $[-1; 4]$.

Comparer si c'est possible, en justifiant vos résultats, les nombres suivants :

a) $g(-3)$ et $g(-2)$

Sur l'intervalle $[-3; -1]$, g est décroissante donc $-3 < -2 \Rightarrow g(-3) \geq g(-2)$

b) $g(1)$ et $g(3)$

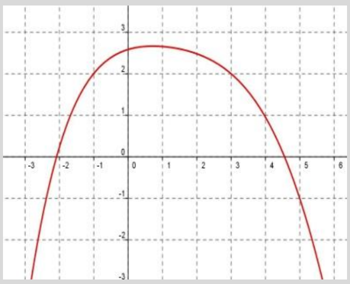
Sur l'intervalle $[1; 3]$, g est croissante donc $1 < 3 \Rightarrow g(1) \leq g(3)$

c) $g(-2)$ et $g(2)$

Sur l'intervalle $[-2; 2]$, g n'est pas monotone. Elle change de variation donc on ne peut pas conclure.

Exercice 2 – QCM sur les fonctions (3 points)

Dans le tableau qui suit, pour chaque question, choisir la ou les bonnes réponses que vous entourerez.

	A	B	C	D
f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -2x^2 + 3x - 1$	-1 a pour image -6 par f	~~$f(-10) = 3$~~	~~$A(0; 1)$ est un point de la courbe de f~~	~~2 est image de -3 par f~~
f est définie par la courbe : 	L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions	~~5 est une solution de l'inéquation $f(x) \geq 0$~~	L'équation $f(x) = 0$ a une solution comprise entre -3 et -2	~~2 est l'unique solution de l'équation $f(x) = 3$~~
f a pour tableau de variations : x : -3 ; -1 ; 2 ; 4 f : $2 \searrow -1{,}5 \nearrow 1 \searrow -1$	$f(0) \leq f(1)$	~~$f(3) \leq f(4)$~~	~~Si $-3 \leq a \leq b - 1$ alors $f(a) \leq f(b)$~~	~~L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $[-3; 3]$~~
	~~f est croissante sur $[-3; 6]$~~	~~f admet un minimum en 4~~	f est décroissante sur $[1; 4]$	Si $x \in [-2; 5]$ alors $f(x) \geq 0$

Exercice 3 – Vecteur (12,5 points)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne : $A(0; 4)$ $B(3\,; 1)$ et $C(1\,; -1)$

1) En prenant comme unité de longueur le cm faire une figure que l'on complètera au fil des questions**.** Construire le point S tel que $\overrightarrow{CS} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$. On laissera apparent les points de construction. Voir graphique.

2) Calculer la valeur exacte des longueurs AB, BC et AC.

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$AB = \sqrt{(3-0)^2+(1-4)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(1-0)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$BC = \sqrt{(1-3)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

3) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

$AB^2 + BC^2 = 18 + 8 = 26 = AC^2$.

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

4) Déterminer par le calcul les coordonnées :

a) du point K milieu de $[BC]$ - Placer le point K sur la figure.

$x_K = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2$ et $y_K = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$

$K(2;0)$

b) du point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$. Placer le point D sur la figure.

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = \frac{2}{3}(x_K - x_A) \\ y_D - y_A = \frac{2}{3}(y_K - y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 0 = \frac{2}{3}(2-0) \\ y_D - 4 = \frac{2}{3}(0-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{4}{3} \\ y_D = -\frac{8}{3}+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = \frac{4}{3} \\ y_D = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$D(\frac{4}{3};\frac{4}{3})$

c) du point E tel que $ACBE$ soit un parallélogramme. Placer le point E.

$ACBE$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - x_B = x_A - x_C \\ y_E - y_B = y_A - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 3 = 0 - 1 \\ y_E - 1 = 4-(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 2 \\ y_E = 6 \end{cases}$

$E(2;6)$.

5) Que représente le point D pour le triangle ABC ? Justifier la réponse.

K est le milieu du segment $[BC]$. Donc (AK) est la médiane du triangle ABC issue de A.

$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow D$ est le centre de gravité du triangle ABC (point de concours des médianes).

6) En utilisant la relation de Chasles et la question 4, démontrer que $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

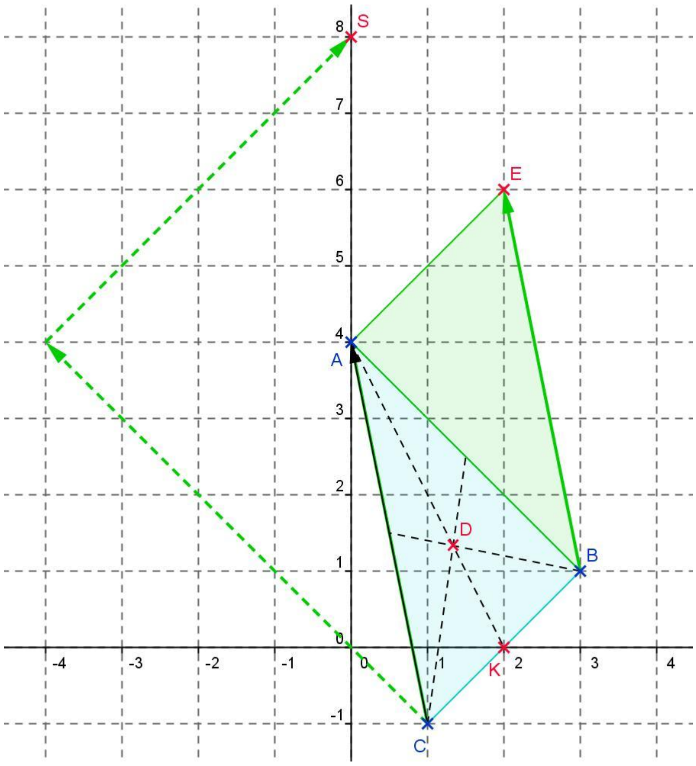
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KC}$

Comme K est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$

Donc $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{DK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK} + 2 \times \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \vec{0}$

Ainsi $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.



Exercice 4 – Statistiques (11,5 points)

Un entomologiste a fait des relevés sur la taille de 50 sauterelles adultes. Il obtient les résultats suivants :

33 35 36 36 37 37 37 38 38 38 39 39 39 39 40 40 40 40 40 41 41 41 41 41 41 41 42 42 42 42 42 42 43 43 43 43 44 44 44 44 45 45 45 46 46 47 47 48 48 50

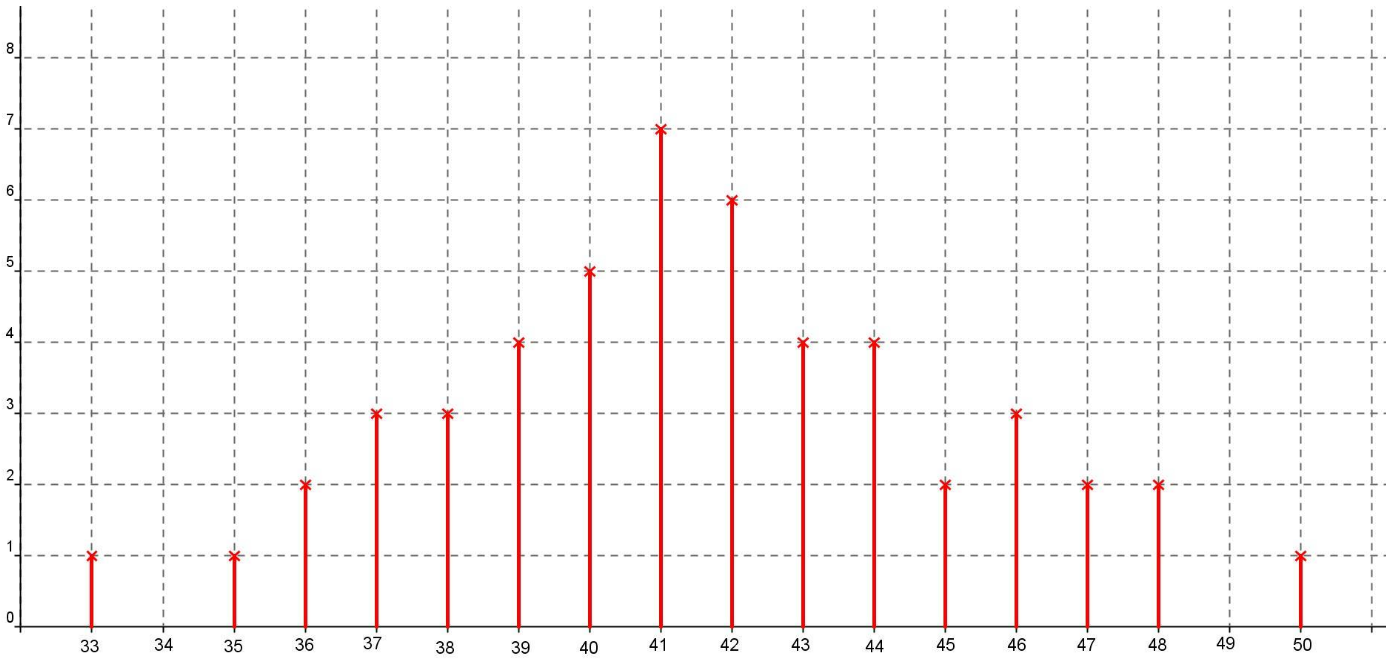
1) Organiser les relevés dans le tableau des effectifs suivants.

Valeurs	33	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	50
Effectifs	1	1	2	3	3	4	5	7	6	4	4	3	2	2	2	1
Effectifs cumulés croissants	1	2	4	7	10	14	19	26	32	36	40	43	45	47	49	50

2) Quelle est la population étudiée ? Quel est le caractère ? Quel est le type de caractère étudié ?

On étudie une population de 50 sauterelles adultes. Le caractère étudié est la taille des sauterelles. C'est un caractère quantitatif discret.

3) Représenter la série par un diagramme en bâtons.



4) Calculer la moyenne $\bar{x}$ de cette série.

$$\bar{x} = \frac{33 \times 1 + 35 \times 1 + 36 \times 2 + \cdots + 48 \times 2 + 50 \times 1}{50} = 41{,}52$$

5) Calculer l'étendue e de cette série. Interpréter ce résultat.

$e = 50 - 33 = 17$. Il peut y avoir jusqu'à 17 cm d'écart entre les plus petites et les plus grandes sauterelles. Ce qui est très important puisque la plus petite sauterelle ne fait que 33 cm.

6) **a)** Déterminer par le calcul la médiane Me. Interpréter ce résultat.

La valeur de la médiane Me correspond à l'effectif $\frac{50}{2} = 25$ des sauterelles rangées par ordre croissant de leur taille.

Dans la ligne des effectifs cumulés croissants, on constate que la $25^{\text{ième}}$ sauterelle à une taille égale à 41 cm. Donc $Me = 41$.

Cela signifie que la moitié de la population a une taille inférieure ou égale à 41 et l'autre moitié a une taille supérieure ou égale à 41 cm. Cette valeur est très proche de la moyenne.

b) Déterminer par le calcul le premier et le troisième quartile. Calculer l'écart interquartile et interpréter ce résultat.

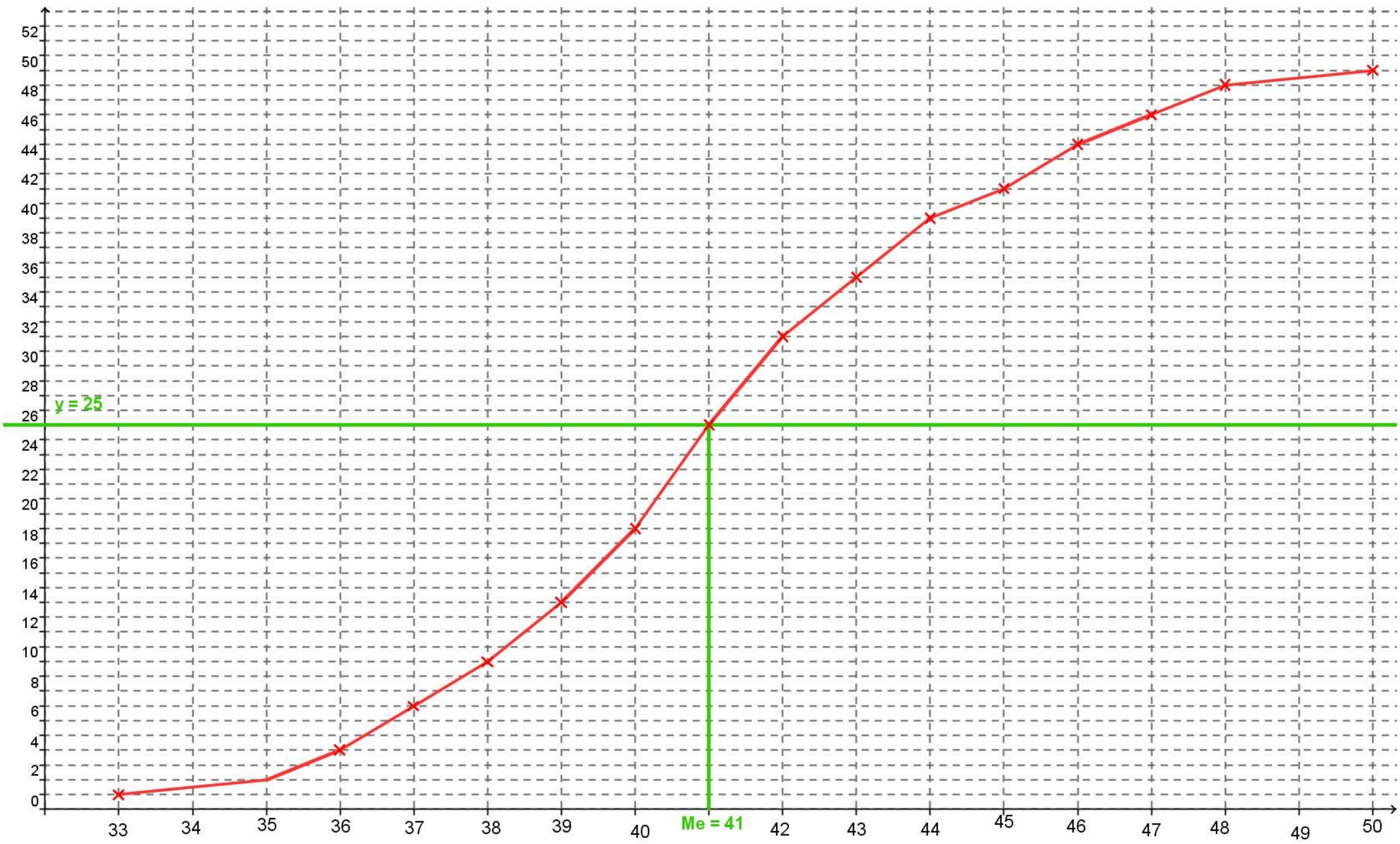
$\frac{50}{4} = 12{,}5$. Donc Q_1 correspond à la taille de la $13^{\text{ième}}$ sauterelle soit $Q_1 = 39$.

$3 \times \frac{50}{4} = 37{,}5$. Donc Q_3 correspond à la taille de la $38^{\text{ième}}$ sauterelle soit $Q_3 = 44$.

$I = Q_3 - Q_1 = 44 - 39 = 5$. Cela signifie qu'environ 50 % des sauterelles ont une taille qui diffère de moins de 5 cm et cette taille est proche de la moyenne.

Il n'y a pas de grandes différences entre les sauterelles malgré une grande étendue.

7) Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et faire apparaître les traits de construction qui permettent de déterminer la valeur de la médiane.



Exercice 5 – Intervalles (4,5 points)

1) On donne les intervalles I et J . Dans chaque cas donner la forme la plus simple de leur intersection $I \cap J$ et leur union $I \cup J$.

a) $I = [-5; 7]$ et $J = [2; 5]$

$I \cup J = [-5; 7]$ et $I \cap J = [2; 5]$

b) $I = [-3; 5[$ et $J = [5; +\infty[$

$I \cup J = [-3; +\infty[$ et $I \cap J = \emptyset$

c) $I = \left]-\infty; \frac{5}{2}\right[$ et $J = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$

$I \cup J =]-\infty; +\infty[$ et $I \cap J = \left[\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right[$

2) Écrire l'ensemble S de nombres suivant sous forme d'un intervalle ou d'une union d'intervalles :

a) $x \geq -3$ et $x \leq 7$

$S = [-3; 7]$

b) $x < -5$ ou $x \leq 8$

$S =]-\infty; 8]$

c) $x \neq -3$

$S =]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$

Exercice 7 – Algorithmique (3,5 points)

On donne l'algorithme suivant :

```
Entrée
Saisir x réel positif
N prend la valeur 0
Traitement
Tant que N+1 ≤x
N prend la valeur N+1
Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

1) Calculer pour $x = 3$ et $x = 4{,}8$

Pour $x = 3$:

Début N=0+1 $\leq x = 3$ donc N prend la valeur 1+1=2

N=2 $\leq x = 3$ donc N prend la valeur 2+1=3

N=3 $\leq x = 3$

$N = 4 \ > \ x = 3$ donc Fin de Tant Que.

On affiche $N = 3$

Pour $x = 4{,}8$:

Début N=0+1 $\leq x = 4{,}8$ donc N prend la valeur 1+1=2

N=2 $\leq x = 4{,}8$ donc N prend la valeur 2+1=3

N=3 $\leq x = 4{,}8$ donc N prend la valeur 3+1=4

N=4 $\leq x = 4{,}8$ donc N prend la valeur 4+5 =5

N=5 $>$ 4,8 donc fin de Tant Que

Afficher N=4

2) Définir en une phrase la fonction $x \rightarrow N$, définie pour x positif.

L'algorithme affiche le plus grand entier naturel N inférieur ou égal à x.