Terminale S – Bac Blanc – Février 2013

Exercice 1 (6 points)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{1-x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{1-x} = 0$

b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée f'.

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C.

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère l'intégrale I_n définie par $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour tout entier naturel n non nul par $f_n(x) = -x^n e^{1-x}$.

a) Montrer que $f_1'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x}$.

En déduire I_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $f_{n+1}'(x) = -(n+1)x^n e^{1-x} + x^{n+1}e^{1-x}$.

En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

c) Calculer I_2. Donner une interprétation graphique du nombre I_2. On la fera apparaître sur le graphique de la question 1) c).

3) **a)** Démontrer que pour tout nombre réel x de $[0; 1]$ et pour tout entier naturel n non nul, on a l'inégalité suivante : $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

b) En déduire un encadrement de I_n puis la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

4) On considère l'algorithme suivant :

```
Variables
    n est du type nombre
    I est du type nombre
    m est du type nombre

Début algorithme
    lire m
    n prend la valeur 1
    I prend la valeur e − 2
    tant que I ≥ m
        début tant que
        I prend la valeur (n + 1) × I − 1
        n prend la valeur n + 1
        fin tant que
    afficher n

Fin algorithme
```

a) Quel est l'affichage en fin d'algorithme pour $m = 0{,}2$?

b) Quel est l'intérêt de cet algorithme ?

Exercice 2 (4 points)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte $0{,}5$ *point ; une réponse inexacte enlève* $0{,}25$ *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1) Une solution de l'équation complexe $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

a) 3 b) i c) $3 + i$

2) Soit z un nombre complexe ; $|z + i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$ b) $|z - 1|$ c) $|i\bar{z} + 1|$

3) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$ b) $\frac{2\pi}{3} + \theta$ c) $\frac{2\pi}{3} - \theta$

4) Soit n un entier naturel. Le complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

a) $n = 3$ b) $n = 6k + 3$ avec k entier relatif   c) $n = 6k$ avec k entier relatif

5) Soient A et B deux points d'affixes respectives i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) La droite (AB) b) Le cercle de diamètre $[AB]$ c) La droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6) Soit Ω le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$ b) $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$ c) $z = 1 - i + 5e^{i\theta}$ avec θ réel

7) Soient A et B les points d'affixes 4 et $3i$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ est :

a) $1 - 4i$ b) $-3i$ c) $7 + 4i$

8) L'ensemble solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est :

a) $\{1 - i\}$ b) L'ensemble vide   c) $\{1 - i; 1 + i\}$

Exercice 3 (5 points)

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} *près. On donne :* $\binom{8}{0} = 1$; $\binom{8}{1} = 8$; $\binom{8}{2} = 28$

Une entreprise produit en grande quantité des stylos.

La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a) On admet que X suit une loi binomiale.

Donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut »

B : « il y a au moins deux stylos avec un défaut »

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut »

2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement : « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.

Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question **1) b)**.

Quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1) a) Calculer u_1.

b) Les valeurs de u_2, u_3, u_4 , u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10} et u_{11} sont respectivement égales à 45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.

A partir de ces données, conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2) Soit (v_n) la suite arithmétique de raison $r = 8$ et de premier terme $v_0 = 16$.

Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4) Valider la conjecture émise à la question **1) b)**.