DST 3 – Corrigé

Exercice 1 (4 points)

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

• si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;

• si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1) Calculer les probabilités des évènements suivants :

a) A : « les 2e et 3e sondages sont positifs » ;

Comme on suppose le premier sondage positif ($p_1 = 1$) on a $p_2 = p(V_2) = 0{,}6$ et d'après l'énoncé $p_{V_2}(V_3) = 0{,}6$.

D'où :

$p(A) = p(V_2 \cap V_3) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$

b) B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».

$p(V_2) = 0{,}6 \Longrightarrow p(\overline{V_2}) = 1 - p(\overline{V_2}) = 0{,}4$ et d'après l'énoncé $p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0{,}9$; D'où :

$p(B) = p(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) = p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0{,}4 \times 0{,}9 = 0{,}36$

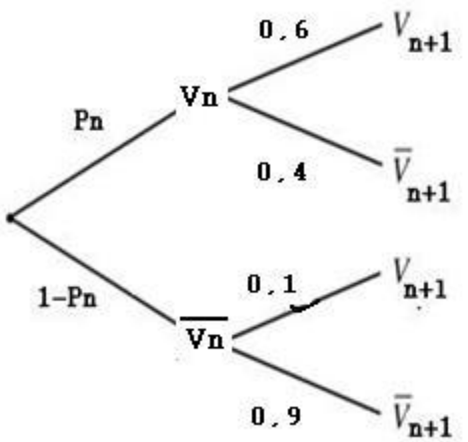
2) Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

$p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0{,}9 \Longrightarrow p_{\overline{V_2}}(V_3) = 1 - p_{\overline{V_2}}(\overline{V_3}) = 0{,}1$

$p_3 = p(V_3) = p(V_3 \cap V_2) + p(V_3 \cap \overline{V_2}) = p(V_2) \times p_{V_2}(V_3) + p(\overline{V_2}) \times p_{\overline{V_2}}(V_3) = 0{,}36 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}4$

3) n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



4) Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout entier naturel n non nul :

$p_{n+1} = p(V_{n+1}) = p(V_{n+1} \cap V_n) + p(V_{n+1} \cap \overline{V_n}) = p(V_n) \times p_{V_n}(V_{n+1}) + p(\overline{V_n}) \times p_{\overline{V_n}}(V_{n+1})$

D'où $p_{n+1} = 0{,}6p_n + 0{,}1(1 - p_n) = 0{,}5p_n + 0{,}1$

5) On note u la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - 0{,}2$.

a) Démontrer que u est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}2 = 0{,}5p_n + 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}5p_n - 0{,}1 = 0{,}5(p_n - 0{,}2) = 0{,}5u_n$

Donc (u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}2 = 0{,}8$

b) Exprimer p_n en fonction de n.

De la question précédente on déduit que $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0{,}8 \times (0{,}5)^{n-1}$.

$u_n = p_n - 0{,}2 \Leftrightarrow p_n = u_n + 0{,}2$

Donc $p_n = 0{,}8 \times (0{,}5)^{n-1} + 0{,}2$

c) Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n.

(u_n) est la suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ de premier terme $u_1 = 0{,}8$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8 \times (0{,}5)^{n-1} = 0$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{p_n} = 0{,}2$

Exercice 2 – QCM (5 points)

Pour chacune des affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ». Il justifiera sa réponse (un contre exemple pourra être donné lorsque l'affirmation est fausse).

Une réponse correcte rapporte 1 *point, une réponse incorrecte enlève* 0,5 *point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.*

1) f est une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

« Si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$ ».

FAUX – Contre-exemple : f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = -x^2$.

$\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad et \quad \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty$

2) « Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a; +\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ».

FAUX – Contre-exemple : Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

3) « Si f est une fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0\,;\, +\infty[$ alors

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ».

VRAI - $0 \le f(x) \le \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

4) « La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ $par\ f(x) = x\sqrt{x}$ est continue et dérivable en 0 ».

VRAI – $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x} = 0$

Le taux d'accroissement entre x et 0 de f admet une limite finie quand x tend vers 0. Cette limite est égale au nombre dérivé $f'(0)$. Donc f est dérivable en 0 et donc aussi continue en 0.

5) Si f est définie sur l'intervalle $[a;b]$ avec $f(b) = -1$ et $f(a) = 2$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a;b]$.

FAUX - Si la fonction n'est pas continue entre a et b, l'équation $f(x) = 0$ peut ne pas avoir de solution.

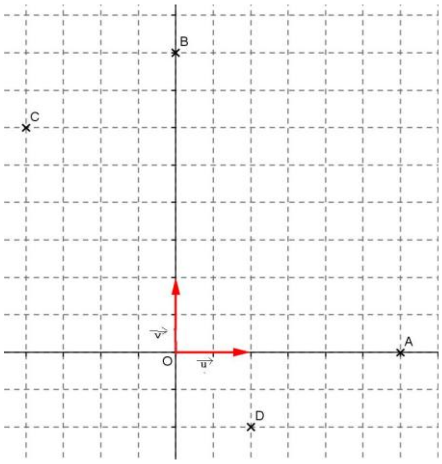
Contre –exemple : f est définie sur $[a;b]$ par $f(x) = 2$ si $x \in [a;b[$ et $f(b) = -1$.

Exercice 3 (4 points)

1) Dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives $3, 4i, -2+3i$ et $1-i$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan.

Voir ci-contre.



b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier votre réponse.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A = 4i - 3 = -3 + 4i$.

Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_c - z_D = -2 + 3i - (1 - i) = -3 + 4i$.

$z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow ABCD$ est un parallélogramme.

2) On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$ (1) et $z^2 - (1+3i)z + 4 + 4i = 0$ (2)

a) Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1, et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$a^2 - (1+3i)a - 6 + 9i = a^2 - a - 3ai - 6 + 9i = a^2 - a - 6 + i(9 - 3ai)$;

a est solution de (1)$\Leftrightarrow a^2 - a - 6 + i(9-3a) = 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0$ et $9 - 3a = 0 \Leftrightarrow a = -2\ ou\ a = 3\ et\ a = 3$

L'équation (1) admet donc une solution réelle $z_1 = 3$

Soit $b \in \mathbb{R}$.

$(bi)^2 - (1+3i)(bi) + 4 + 4i = b^2i^2 - bi - 3bi^2 + 4 + 4i = -b^2 + 3b + 4 + i(4-b)$

bi est solution de (2)$\Leftrightarrow -b^2 + 3b + 4 + i(4-b) = 0 \Leftrightarrow -b^2 + 3b + 4 = 0$ et $4 - b = 0 \Leftrightarrow b = -1\ ou\ b = 4\ et\ b = 4$

L'équation (2) admet donc une solution imaginaire pure $z_2 = 4i$.

b) Développer $(z-3)(z+2-3i)$, puis $(z-4i)(z-1+i)$.

$(z-3)(z+2-3i)=z^2-3z+2z-6-3iz+9i=z^2-(1+3i)z-6+9i.$

$(z-4i)(z-1+i)=z^2-4iz-z+4i+iz-4i^2=z^2-(1+3i)z+4+4i\,.$

c) En déduire les solutions de l'équation : $(z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i)=0$

$(z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i)=0 \Leftrightarrow z^2-(1+3i)z-6+9i=0 \text{ ou } z^2-(1+3i)z+4+4i=0$

$\Leftrightarrow (z-3)(z+2-3i)=0 \text{ ou } (z-4i)(z-1+i)=0$

$\Leftrightarrow z=3 \text{ ou } z=-2+3i \text{ ou } z=4i \text{ ou } z=1-i$

3) On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' telle que : $z'=z^2-(1+3i)z-6+9i$.

On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

$z'=z^2-(1+3i)z-6+9i \Leftrightarrow x'+iy'=(x+iy)^2-(1+3i)(x+iy)-6+9i$

$\Leftrightarrow x^2+2ixy+y^2i^2-x-3ix-iy-3yi^2-6+9i$

$\Leftrightarrow x^2-y^2-x+3y-6+i(-3x-y+2xy+9)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x'=x^2-y^2-x+3y-6 \\ y'=-3x-y+2xy+9 \end{cases}$$

Exercice 4 (7 points)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-3$

1) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

$$g(x)=x^3-3x-3=x^3\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$$

<u>Limite en $-\infty$</u>

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^3}=0$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$

<u>Limite en $+\infty$</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3}{x^3}=0$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

2) Étudier les variations de g.

$g'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

$g'(x)$ est un polynôme de degré 2 ayant deux racines -1 et $+1$. Son coefficient $a=3>0$ d'où le tableau de signes de $g'(x)$ suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$

$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On en déduit les variations de g :

Si $x \in]-\infty; -1[$ ou $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante.

Si $x \in]-1; 1[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

On peut résumer les données des questions 1 et 2 dans le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

$g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 3 = -1$ et $g(1) = (1)^3 - 3 \times 1 - 3 = -5$

3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

Sur l'intervalle $]-\infty; 1]$, $g(x)$ admet un maximum égal à -1. On a donc $g(x) \leq -1 < 0$.

L'équation $g(x) = 0$ n'a donc pas de solution dans l'intervalle $]-\infty; 1]$.

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction g est **continue** (car dérivable), **strictement** croissante, $g(1) = -5$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$0 \in [-5; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[1; +\infty[$.

Ainsi, sur $]-\infty; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

Donner un encadrement à 10^{-2} près de α.

$g(2{,}10) < 0$ et $g(2{,}11) > 0$ donc $2{,}1 < \alpha < 2{,}11$.

4) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x sur $\mathbb{R}$.

Sur l'Intervalle $]-\infty; 1]$, $g(x) \leq -1 < 0$

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$ donc si $x \in [1; \alpha[$, $g(x) < 0$ et si $x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$. D'où le tableau de signes suivant:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ par $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$

On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal.

Unité graphique : 2 cm pour 1 en abscisses, 1 cm pour 2 en ordonnées.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Limite en $+\infty$

$$f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}=\frac{x^3(2+\frac{3}{x^3})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})}=x\times\frac{2+\frac{3}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{x^2}=0 \text{ donc } \lim_{x\to+\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}\right)=2 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

Donc par produit et quotient de limites, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Limite en $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{1}{x^2}=0 \text{ donc } \lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}\right)=2 \text{ et } \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

De plus $\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$. Donc par produit et quotient de limites, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Limite en -1

$\lim_{x\to-1}(2x^3+3)=1$

$\lim_{x\to-1}(x^2-1)=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$

Limite en $+1$

$\lim_{x\to-1}(2x^3+3)=5$

$\lim_{x\to1}(x^2-1)=0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$

En déduire les asymptotes à la courbe C_f .

$\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=+\infty$ et $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote verticale à la courbe C_f

$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale à la courbe C_f

2) Déterminer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.

$$f'(x)=\frac{6x^2(x^2-1)-2x(2x^3+3)}{(x^2-1)^2}=\frac{6x^4-6x^2-4x^4-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^4-6x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x(x^3-3x-3)}{(x^2-1)^2}$$

Soit $f'(x)=\dfrac{2xg(x)}{(x^2-1)^2}$

Quelque soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $(x^2-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a même signe que $2xg(x)$. D'où le tableau de signes de $f'(x)$ suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	

3) Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \ \| \ -\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \ \| \ +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Soit D la droite d'équation $y = 2x$.

a) Étudier le signe de $f(x) - 2x$ suivant les valeurs de x.

$$f(x) - 2x = \frac{2x^3+3}{x^2-1} - 2x = \frac{2x^3+3-2x(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		$+\infty$
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-2x$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

b) En déduire la position de C_f par rapport à D.

Si $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[\cup]-1;1[$, $f(x) - 2x < 0$ donc C_f en dessous de D.

Si $x \in \left]-\frac{3}{2}; -1\right[\cup]1;+\infty[$, $f(x) - 2x > 0$ donc C_f au dessus de D.

Si $x = -\frac{3}{2}$, $f(x) - 2x = 0$, donc la courbe C_f et la droite D se croisent en $A(-\frac{3}{2};-3)$.

5) Calculer la limite de $f(x) - 2x$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x) - 2x = \frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{1}{x} \times \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} 2+\frac{3}{x} = 2 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1$$

Donc par produit et quotient de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - 2x) = 0$

De même $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = 0$

Donner une interprétation de ce résultat.

Le droite D d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

6) Construire la courbe C_f et la droite D dans le même repère fourni en annexe.

x	-5	-4	-3	-2	$-1{,}5$	$-1{,}2$	$-0{,}8$	0	$0{,}5$	$0{,}8$	$1{,}2$	$2{,}1$	3	5
$f(x)$	$-10{,}29$	$-8{,}3$	$-6{,}375$	$-4{,}3$	-3	$-1{,}036$	$-5{,}488$	-3	$-4{,}3$	$-11{,}17$	$14{,}672$	$6{,}3114$	$7{,}125$	$10{,}541$